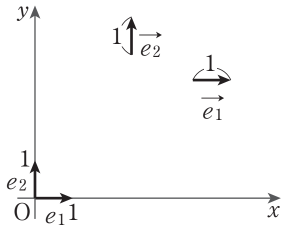
第 2 講　ベクトルの成分表示

PART1　ベクトルの成分

要点 ① 基本ベクトルとベクトルの成分

ここでは，座標平面上でベクトルを考える。

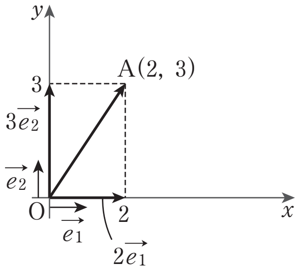
O を原点とする座標平面上において，x 軸，y 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを「基本ベクトル」といい，それぞれ $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ で表す。$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ の始点を O とすると，終点の座標はそれぞれ (1，0)，(0，1) である。



座標平面上のベクトル $\vec{a}$ に対し，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ である点 A をとったとき，その座標が (2，3) であるならば，$\vec{a}$ は右図より

$$\vec{a}=\quad\vec{e_1}+\quad\vec{e_2}$$

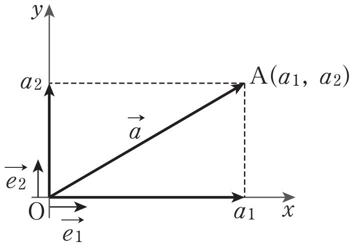
と，基本ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ を用いてただ 1 通りに表される。



一般に，座標平面上のベクトル $\vec{a}$ に対し，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ である点 A をとったとき，その座標が $(a_1，a_2)$ であるならば，$\vec{a}$ は

$$\vec{a}=\qquad\vec{e_1}+\qquad\vec{e_2}$$

と，基本ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ を用いてただ 1 通りに表される。



この a_1，a_2 を，それぞれ $\vec{a}$ の「　　　」，「　　　」といい，

$$\vec{a}=$$

と表す。この表し方を，$\vec{a}$ の「　　　　」という。

基本ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，および零ベクトル $\vec{0}$ の成分表示は，次のようになる。

$$\vec{e_1}=(1，0)，\vec{e_2}=(0，1)，\vec{0}=(0，0)$$

要点 ② 成分表示されたベクトルの相等と大きさ

2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が等しいのは，向きが同じで大きさも等しいときである。成分表示された 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1，a_2)$，$\vec{b}=(b_1，b_2)$ について，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ となる点 A，B をとると，A，B はそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ の終点であり，その座標はそれぞれ $(a_1，a_2)$，$(b_1，b_2)$ である。このとき，2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が等しいのは，終点の座標が一致するときである。

したがって，成分表示された 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について，次のことが成り立つ。

$$\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1 \text{ かつ } a_2=b_2$$

また，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とすると，$|\vec{a}|$ は線分 OA の長さであることより，次のことがいえる。

成分表示されたベクトルの大きさ

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき　　$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$

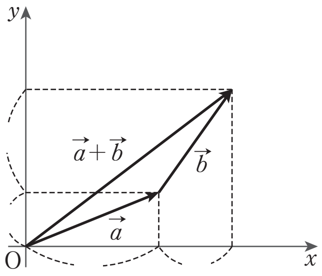
要点 ③ 成分表示されたベクトルの演算

成分表示された 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ は，基本ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ を用いて

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2},\quad \vec{b}=b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}$$

と表される。よって

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})+(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2})$$
$$=(a_1+b_1)\vec{e_1}+(a_2+b_2)\vec{e_2}$$
$$\vec{a}-\vec{b}=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})-(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2})$$
$$=(a_1-b_1)\vec{e_1}+(a_2-b_2)\vec{e_2}$$

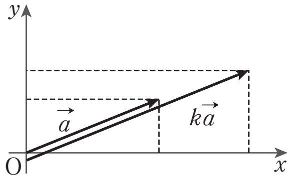


より，$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$，$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$ と表される。

また，k を実数とするとき

$$k\vec{a}=k(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})=(ka_1)\vec{e_1}+(ka_2)\vec{e_2}$$

であるから，$k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$ である。



以上より，2 つのベクトルの和，差，実数倍を成分で表すと，以下のようになる。

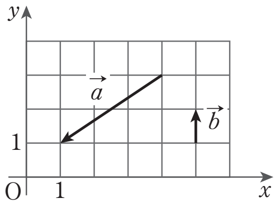
成分表示されたベクトルの演算

$(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

$(a_1,\ a_2)-(b_1,\ b_2)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

$k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)$　　（k は実数）

1 (1) 右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ を成分で表し，その大きさを求めよ。



(2) $\vec{a}=(2,\ -1)$，$\vec{b}=(-3,\ 2)$ のとき，次のベクトルを成分で表せ。

(i) $\vec{a}-\vec{b}$　　(ii) $2\vec{a}+3\vec{b}$

Point Pickup

ベクトルの成分表示と大きさ

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とすると，点 A の座標は $(a_1,\ a_2)$

よって　$|\vec{a}|=\mathrm{OA}=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$

成分表示されたベクトルの演算

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$，k を実数とするとき

和　$\vec{a}+\vec{b}=(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

差　$\vec{a}-\vec{b}=(a_1,\ a_2)-(b_1,\ b_2)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

実数倍　$k\vec{a}=k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)$

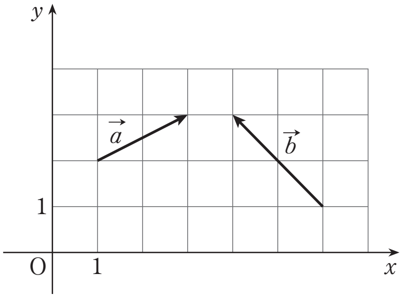
第 2 講　PART1 確認問題

1 次の図のベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の成分と大きさは

$$\vec{a}=(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}),\quad |\vec{a}|=\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$$

$$\vec{b}=(\boxed{\text{エオ}},\ \boxed{\text{カ}}),\quad |\vec{b}|=\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$$

である。



2 $\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ -4)$ のとき，$\vec{a}+\vec{b}$ を成分で表すと

$$\vec{a}+\vec{b}=(\boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コサ}})$$

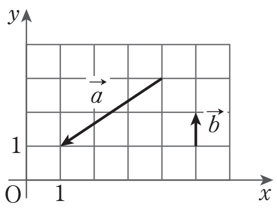
3 $\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ -4)$ のとき，$3\vec{a}-\vec{b}$ を成分で表すと

$$3\vec{a}-\vec{b}=(\boxed{\text{シ}},\ \boxed{\text{スセ}})$$

第 2 講　ベクトルの成分表示

PART1　ベクトルの成分

1　(1)　右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ を成分で表し，その大きさを求めよ。



(2)　$\vec{a}=(2,\ -1)$，$\vec{b}=(-3,\ 2)$ のとき，次のベクトルを成分で表せ。

(i)　$\vec{a}-\vec{b}$　　　(ii)　$2\vec{a}+3\vec{b}$

[解答]

(1)　$\vec{a}=(-3,\ -2)$，$\vec{b}=(0,\ 1)$

$|\vec{a}|=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$，$|\vec{b}|=1$

(2) (i)　$\vec{a}-\vec{b}=(2,\ -1)-(-3,\ 2)=(2+3,\ -1-2)=(5,\ -3)$

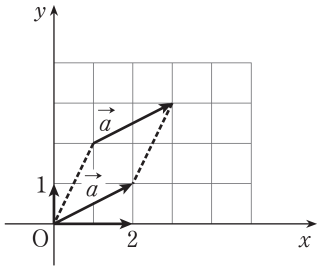
(ii)　$2\vec{a}+3\vec{b}=2(2,\ -1)+3(-3,\ 2)=(4,\ -2)+(-9,\ 6)=(-5,\ 4)$

第 2 講　PART1 確認問題 解答

1

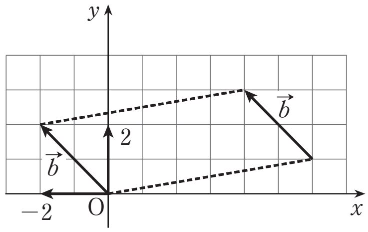
[正解] ア：2，イ：1，ウ：5，エオ：−2，カ：2，
キ：2，ク：2

[解説]



$\vec{a}=(2,\ 1)$

$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ [A]



$\vec{b}=(-2,\ 2)$

$|\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ [A]

> [A]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき
> $|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$

2

[正解] ケ：3，コサ：−1

[解説]

$\vec{a}+\vec{b}=(1,\ 3)+(2,\ -4)$ [B]

$=(1+2,\ 3-4)$

$=(3,\ -1)$

> [B]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき
> $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

3 [正解] シ：1，スセ：13

[解説]

$3\vec{a}-\vec{b}=3(1,\ 3)-(2,\ -4)$ [C]

$=(3,\ 9)-(2,\ -4)$

$=(3-2,\ 9+4)$

$=\mathbf{(1,\ 13)}$

[C]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき

$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

$k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$　（k は実数）